

Studio di funzione

Lo studio di una funzione reale di variabile reale f consiste nel determinare le seguenti informazioni su f che ci permettano di tracciare un grafico qualitativo della funzione in un riferimento cartesiano:

- 1) dominio naturale di f , cioè il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui è possibile calcolare $f(x)$
- 2) Quando $\text{dom}(f)$ è un insieme simmetrico (rispetto a 0) controlliamo se f ammette simmetrie, ovvero se f è una funzione pari o una funzione dispari

- 3) Studiamo il segno di f , cioè risolviamo

$f(x) > 0$ per determinare in quali sottoinsieme di $\text{dom}(f)$ il grafico di f si trova al di sopra dell'asse x

$f(x) = 0$ per determinare gli zeri di f (punti di intersezione del grafico con l'asse x)

- 4) Calcoliamo i limiti di f nei punti di frontiera del dominio evidenziando eventuali asintoti orizzontali e/o verticali.

Quando $\text{dom}(f)$ è illimitato superiormente e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ o $-\infty$ controlliamo se f ammette asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$

Quando $\text{dom}(f)$ è illimitato inferiormente e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ o $-\infty$ controlliamo se f ammette asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$

Se f ammette asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ (risp. per $x \rightarrow -\infty$) allora NON cerchiamo asintoti obliqui per $x \rightarrow +\infty$ (risp. per $x \rightarrow -\infty$)

- 5) Calcoliamo la derivata prima f'

Se $\text{dom}(f') \subsetneq \text{dom}(f)$ classifichiamo i punti di non derivabilità della f (punti angolosi / punti a tangenti verticali / cuspidi)

Calcoliamo i punti stazionari di f risolvendo $f'(x) = 0$

Stabiliamo gli intervalli di monotonia risolvendo $f'(x) > 0$ e/o $f'(x) < 0$

BONUS: calcoliamo la derivata seconda f'' e determiniamo i punti di flesso e gli intervalli in cui f è convessa / concava

- 6) Tracciamo in un riferimento cartesiano un grafico qualitativo che sia coerente con le informazioni sulle f ottenute nei punti precedenti

Es 1 $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

C.E. $x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \wedge x \neq 1$

$\text{dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$

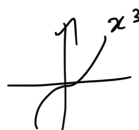
f è una funzione dispari (il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine)

Cerchiamo gli zeri di f

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

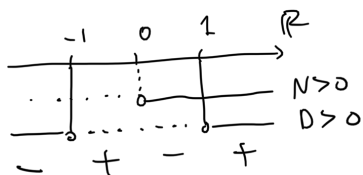
Studiamo il segno di f

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2-1} > 0$



$N > 0 : x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$D > 0 : x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$



$f(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \vee x > 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty$

controlliamo se c'è un'asintota obliqua per $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$

$y = x$ è asintota obliqua per $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

$x = -1$ è un'asintota verticale

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

$x = 1$ è asintota verticale

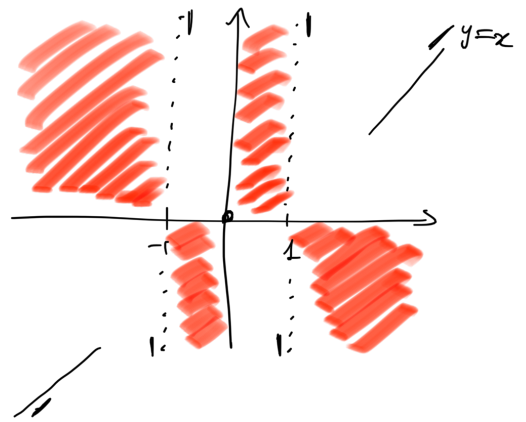
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty$

ripetendo gli stessi calcoli visto per $x \rightarrow -\infty$, si trova che $y = x$ è anche asintota obliqua per $x \rightarrow +\infty$

Calcoliamo f'

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^2(3x^2-3-2x^2)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$



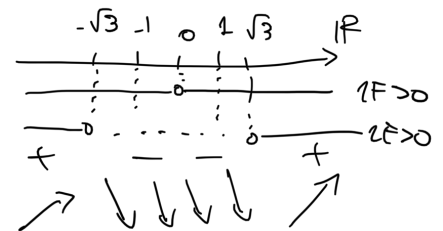
Determiniamo i punti stazionari

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2-3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Studiamo il segno di f'

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} > 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-3) > 0$$

$$\begin{aligned} 1^{\circ} &f' > 0 : x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \\ 2^{\circ} &f' > 0 : x^2-3 > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3} \end{aligned}$$



f è strettamente crescente su $(-\infty, -\sqrt{3})$ e su $(\sqrt{3}, +\infty)$

f è strettamente decrescente su $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \sqrt{3})$

$$\begin{aligned} x = -\sqrt{3} &\text{ è punto di massimo relativo} & f(-\sqrt{3}) &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ x = \sqrt{3} &\text{ è punto di minimo relativo} & f(\sqrt{3}) &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Calcoliamo f''

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{[2x(x^2-3) + x^2 \cdot 2x](x^2-1)^2 - x^2(x^2-3) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{[2x(2x^2-3)](x^2-1) - 4x^3(x^2-3)}{(x^2-1)^3} = \frac{2x[(2x^2-3)(x^2-1) - 2x^2(x^2-3)]}{(x^2-1)^3} \\ &= \frac{2x[2x^4 - 5x^2 + 3 - 2x^4 + 6x^2]}{(x^2-1)^3} = \frac{2x[x^2+3]}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

Cerchiamo i punti di flesso

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee x^2 + 3 = 0$$

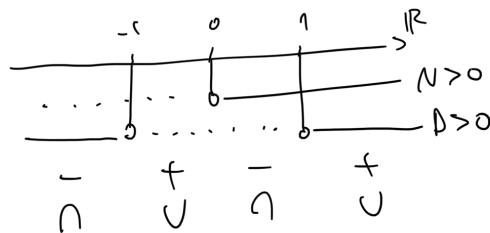
$$\Leftrightarrow x = 0$$

Cerchiamo gli intervalli in cui f è convessa

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(x^2 - 1)^3} > 0$$

$$N > 0 : x > 0$$

$$D > 0 : (x^2 - 1)^3 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$$



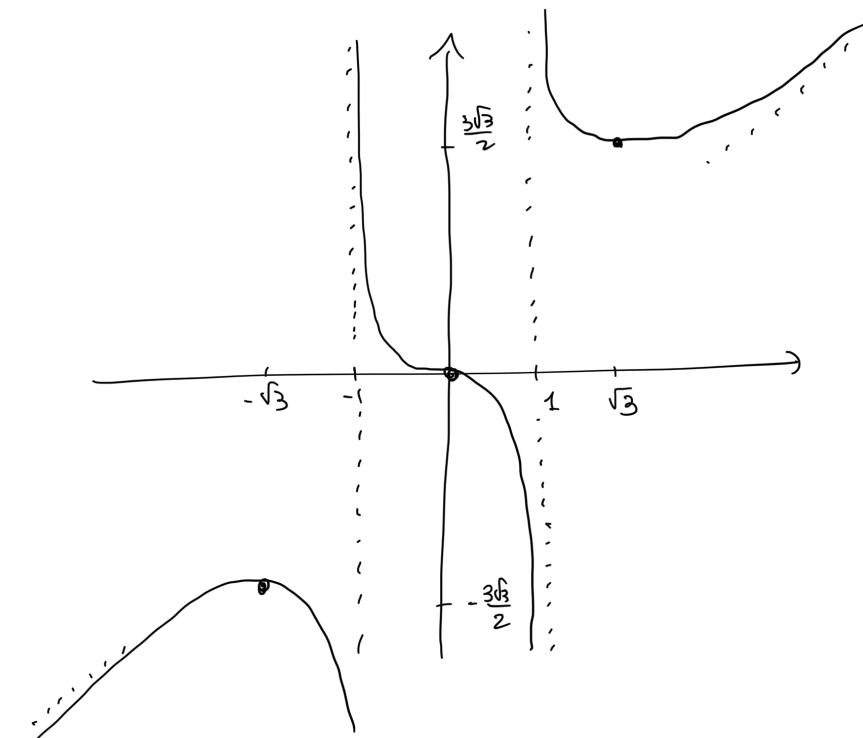
$x = 0$ è punto di flesso

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \vee x > 1$$

(intervalli convessità)

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee 0 < x < 1$$

(intervalli di concavità)



ES 2

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\text{c.e. } x^2 + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{dom}(f) = \mathbb{R}$$

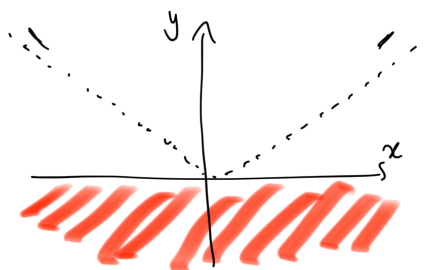
$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x) \quad f \text{ è una funzione pari}$$

Verifichiamo se ci sono zeri

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \text{ impossibile in } \mathbb{R}$$

studio del segno

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

Verifichiamo se ci sono asintoti obliqui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$\stackrel{[\infty - \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$y = x$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$

$y = -x$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$

Calcoliamo f'

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

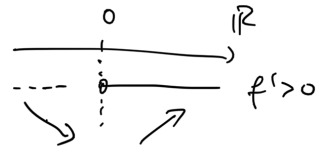
$$\text{dom } f' = \mathbb{R}$$

Cerchiamo i punti stazionari

$$f'(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = 0$$

Studiamo il segno di f'

$$f'(x) > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x > 0$$



f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$

f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$

$x=0$ è punto di minimo relativo

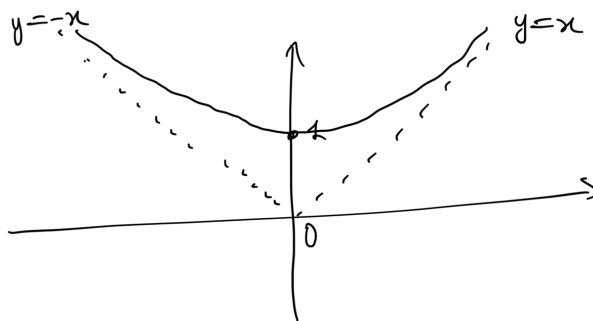
$$f(0) = \sqrt{0^2+1} = 1$$

Calcoliamo f''

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} (x^2+1 - x^2)}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1} (x^2+1)} \end{aligned}$$

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f \text{ è convessa in } \mathbb{R}$$



Es 3

$$f(x) = e^{-x^2} \sqrt{1+x}$$

$$\text{C.E. } 1+x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -1$$

$$\text{dom}(f) = [-1, +\infty)$$

il dominio non è simmetrico rispetto a 0, quindi f non può essere né pari né dispari

Cerchiamo gli zeri di f

$$\begin{aligned} f(x) = 0 & \quad (\Leftrightarrow) \quad e^{-x^2} = 0 \quad \vee \quad \sqrt{1+x} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \sqrt{1+x} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 1+x = 0 \\ & \quad (\Leftrightarrow) \quad x = -1 \end{aligned}$$

studiamo il segno di f

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} \sqrt{1+x} > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} \sqrt{1+x}$$

$$\stackrel{[0, \infty]}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} \sqrt{1+t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t+1}}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{t}}{e^t} = 0$$

$$t = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{t}$$

se $x \rightarrow +\infty$ allora $t \rightarrow +\infty$

$y=0$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$

Calcoliamo f'

$$f(x) = e^{-x^2} \sqrt{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (e^{-x^2}) \cdot \sqrt{1+x} + e^{-x^2} \frac{d}{dx} \sqrt{1+x}$$

$$= -2x \cdot e^{-x^2} \cdot \sqrt{1+x} + e^{-x^2} \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{1+x}} (-2x \cdot \sqrt{1+x} \cdot 2\sqrt{1+x} + 1)$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{1+x}} (-4x(1+x) + 1) = \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{1+x}} (-4x^2 - 4x + 1)$$

$x = -1$ è un punto di non derivabilità

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 - 4x + 1 = 0$$

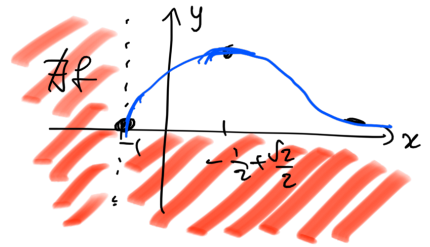
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 1 = 32$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{-8} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) < -1 \quad \text{non appartiene al dominio}$$

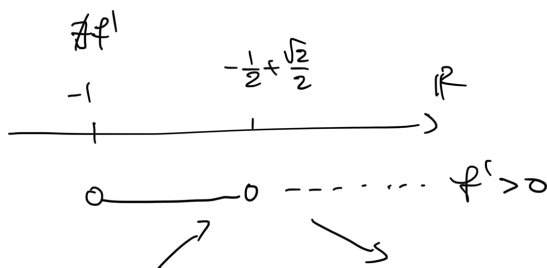
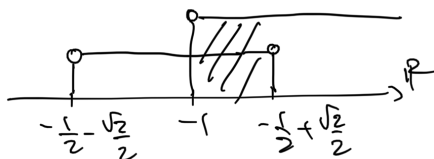
studiamo il segno di f'

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 - 4x + 1 > 0 \\ x \in \text{dom } f' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4x - 1 < 0 \\ \text{dom } f' \ni x \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} < x < -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x > -1 \end{cases}$$

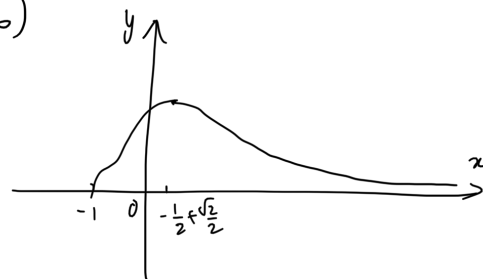
$$\Leftrightarrow -1 < x < -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$



f è strettamente crescente in $(-1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})$

f è strettamente decrescente in $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$

$x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ è punto di massimo (assoluto)

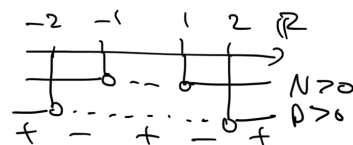


Es 4 $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)$

$$\text{C.E.} \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-4} > 0 \\ x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2 \end{cases}$$

$$N > 0 : x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$$

$$D > 0 : x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$$



$$\text{C.E.} \begin{cases} x < -2 \vee -1 < x < 1 \vee x > 2 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$$

$$\text{dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$$

$\text{dom}(f)$ è simmetrica rispetto a 0

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow f \text{ è una funzione pari}$$

Cerchiamo eventuali zeri di f

$$\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right) < 0 = \ln 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-4} = 1 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-4} - 1 = 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x^2-1-x^2+4}{x^2-4} = 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$$

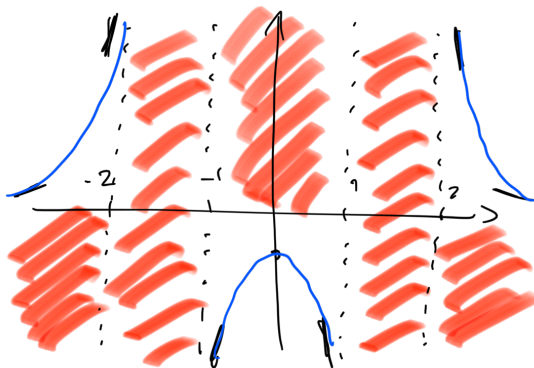
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{x^2-4} = 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

φ non ha zeri

Studiamo il segno

$$f(x) > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} \frac{3}{x^2-4} > 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x < -2 \vee x > 2 \\ x < -2 \vee -(-1 < x < 1) \vee x > 2 \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad x < -2 \vee x > 2$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right) = \ln 1 = 0$$

$y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ (anche per $x \rightarrow -\infty$)

$$\text{per } x \rightarrow -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right) = -\infty \quad \text{perché} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-1}{x^2-4} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right) = -\infty \quad \text{perché} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x^2-4} = 0^+, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty$$

$$\text{per } x \rightarrow -1^+ \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2-4}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2-1}{x^2-4} \right) = \frac{x^2-4}{x^2-1} \cdot \frac{2x(x^2-4) - (x^2-1)2x}{(x^2-4)^2}$$

$$= - \frac{6x(x^2-4)}{(x^2-1)(x^2-4)^2} = - \frac{6x}{(x^2-1)(x^2-4)}$$

punti stazionari:

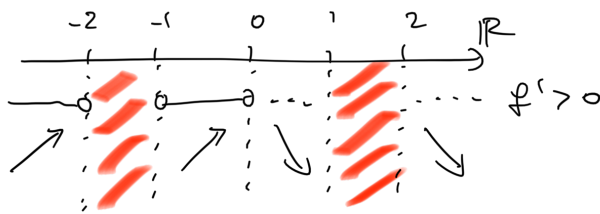
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

studiamo il segno di f'

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow - \frac{6x}{(x^2-1)(x^2-4)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(x^2-1)(x^2-4)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < -2 \text{ o } x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < -2 \vee -1 < x < 1 \vee x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x < -2 \vee -1 < x < 0$$



f è strettamente crescente in $(-\infty, -2)$ e in $(-1, 0)$

f è strettamente decrescente in $(0, 1)$ e in $(2, +\infty)$

$x=0$ è un punto di massimo relativo $f(0) = \ln \frac{1}{4} = -2 \ln 2$

Calcoliamo la derivata seconda

$$f'(x) = - \frac{6x}{(x^2-1)(x^2-4)}$$

$$f''(x) = -6 \frac{d}{dx} \frac{x}{(x^2-1)(x^2-4)} = -6 \left[\frac{(x^2-1)(x^2-4) - x \cdot 2x(x^2-1+x^2-4)}{(x^2-1)^2 (x^2-4)^2} \right]$$

$$= -6 \frac{(x^2-1)(x^2-4) - 2x^2(2x^2-5)}{(x^2-1)^2 (x^2-4)^2}$$

$$= -6 \frac{x^4 - 5x^2 + 4 - 4x^4 + 10x^2}{(x^2-1)^2 (x^2-4)^2} = -6 \frac{-3x^4 + 5x^2 + 4}{(x^2-1)^2 (x^2-4)^2}$$

$$= 6 \frac{3x^4 - 5x^2 - 4}{(x^2-1)^2 (x^2-4)^2}$$

cerchiamo eventuali punti di flesso

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^4 - 5x^2 - 4 = 0$$

Poniamo $t = x^2$

$$3t^2 - 5t - 4 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad t = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{6} \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{6}$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 25 + 48 = 73$$

$$\text{Poiché } \sqrt{73} > 6 \quad (\Leftrightarrow) \quad 73 > 36 \quad \frac{5 - \sqrt{73}}{6} < 0$$

quindi l'equazione $x^2 = \frac{5 - \sqrt{73}}{6}$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$

$$f''(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 = \frac{5 + \sqrt{73}}{6} \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{73}}{6}}$$

$$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{73}}{6}} \simeq 1.5024 \dots \in (1, 2) \quad \text{pertanto } \pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{73}}{6}} \notin \text{dom}(f)$$

f non ha punti di flesso

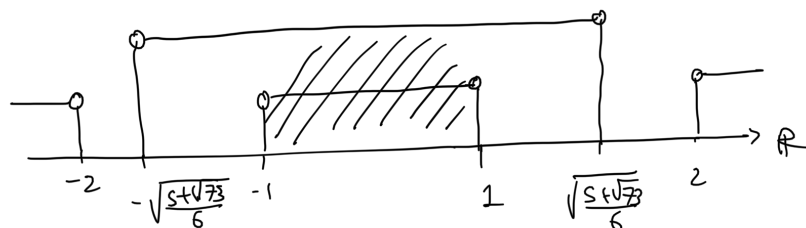
Studiamo il segno di f''

$$f''(x) > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} 6 \frac{3x^4 - 5x^2 - 4}{(x^2 - 1)^2 (x^2 - 4)^2} > 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} 3x^4 - 5x^2 - 4 > 0 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} 3t^2 - 5t - 4 > 0 \\ t = x^2 \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} \frac{5 - \sqrt{73}}{6} < t < \frac{5 + \sqrt{73}}{6} \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} \frac{5 - \sqrt{73}}{6} < x^2 < \frac{5 + \sqrt{73}}{6} \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{73}}{6}} < x < \sqrt{\frac{5 + \sqrt{73}}{6}} \\ x \in \text{dom}(f) \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{73}}{6}} < x < \sqrt{\frac{5 + \sqrt{73}}{6}} \\ x < -2 \vee -(1 < x < 1) \vee x > 2 \end{cases}$$

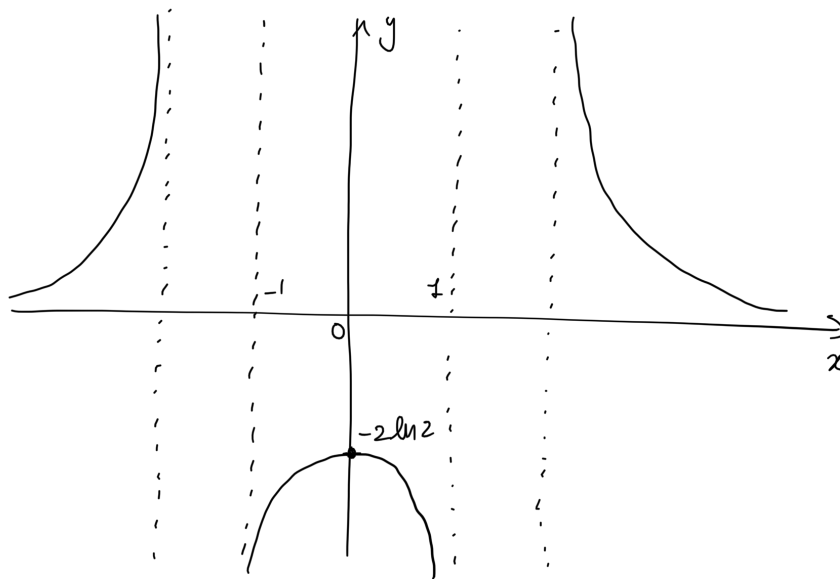


$$f''(x) > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad -1 < x < 1$$

analogamente

$$f''(x) < 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x < -2 \vee x > 2$$

Quindi: f è convessa in $(-1, 1)$
 f è concava in $(-\infty, -2)$ e in $(2, +\infty)$



Esercizi nr cose

Studiare le seguenti funzioni

5) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3 + 1}$ (trascurare il calcolo di f'')

6) $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$

7) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$

8) $f(x) = \arctg(x^2)$